

2026 北大文系数学

□ $f(x) = x^3 - 2x^2$, ただし $a > 2$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 4x = 3x(x - \frac{4}{3})$ より,
 $x = 0, \frac{4}{3}$ で $f'(x) = 0$ となる。したがって、
 増減表は、以下の通りである。

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$
		(極大)		(極小)	

$$f(0) = 0$$

$$f(\frac{4}{3}) = (\frac{4}{3})^3 - 2(\frac{4}{3})^2$$

$$= (\frac{4}{3})^2 (\frac{4}{3} - 2)$$

$$= \frac{16}{9} (-\frac{2}{3})$$

$$= -\frac{32}{27}$$

よって、 $x = 0$ で極大値 $f(0) = 0$

$$x = \frac{4}{3} \text{ で極小値 } f(\frac{4}{3}) = -\frac{32}{27}$$

//

(2) $y = f(x)$ のグラフは右図の通りである。

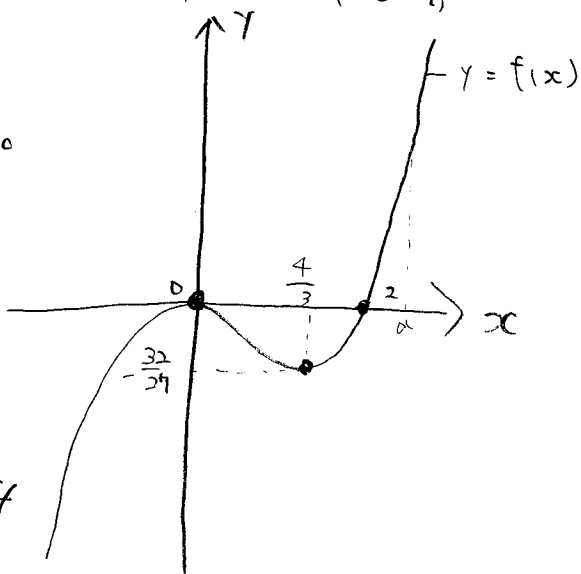
a は $2 < a$ を満たす
 定数であることに注意する。

グラフより、 $0 \leq x \leq a$

における $f(x)$ の Max は、

$f(a)$ であり、

$$\text{Max は } f(a) = a^3 - 2a^2$$



□

(3) $y = |f(x)|$ のグラフは右図の通りである。

$y = |f(x)|$ は右図の
実線部分であり、

$y = f(x)$ のうち $y < 0$
となる部分を x 軸で
折り返せばよい。

からよい。

$$\int_0^a |f(x)| dx$$

$$= \int_0^2 -f(x) dx + \int_2^a f(x) dx$$

$$= -\int_0^2 (x^3 - 2x^2) dx + \int_2^a (x^3 - 2x^2) dx$$

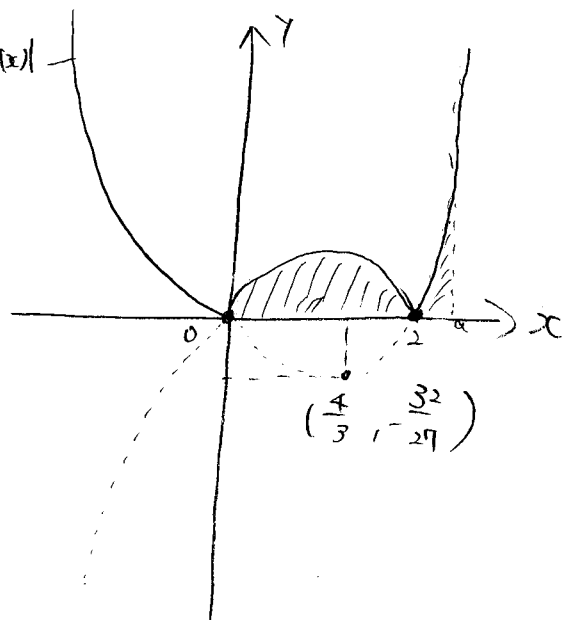
$$= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_2^a$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{2}{3} \cdot 2^3\right) + \frac{1}{4}(a^4 - 2^4) - \frac{2}{3}(a^3 - 2^3)$$

$$= -4 + \frac{16}{3} + \frac{1}{4}a^4 - 4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{16}{3}$$

$$= \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{8}{3}$$

4



$$\boxed{2} \quad a_n > 0, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 2$$

$$(1) \quad b_n = \frac{1}{a_{n+2}} \text{ 并、}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{2}{a_n + 1} + 2} \quad (\because a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1})$$

$$= \frac{a_n + 1}{2 + 2(a_n + 1)}$$

$$= \frac{a_n + 1}{2a_n + 4}$$

$$= \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)}$$

$$= \frac{(a_n + 2) - 1}{2(a_n + 2)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n + 2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \quad \text{--- ①}$$

b_{n+1} を b_n で表した... のために
 $\therefore \frac{1}{a_{n+2}} (= b_n)$
 を作り出すように
 変形する。

(2) まず、 $\{b_n\}$ の一般項を求める。

$$\text{① は、} b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{3} \right) \text{ と変形できる、}$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1 + 2} = \frac{1}{4 + 2} = \frac{1}{6} \text{ であるから、}$$

$$\text{数列} \{b_n - \frac{1}{3}\} \text{ は、初項 } b_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6},$$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって、

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

[2]

$$(2) \quad \tau = \tau'', \quad b_n = \frac{1}{a_n + 2} \notin \mathbb{Q}, \quad b_n(a_n + 2) = 1$$

$$a_n b_n + 2 b_n = 1 \quad \therefore a_n = \frac{1 - 2 b_n}{b_n}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} - 2 \quad \tau'' \notin \mathbb{Q}$$

よって、

$$a_n = \frac{3}{(-\frac{1}{2})^n + 1} - 2$$

$$\therefore a_n = \frac{-2(-\frac{1}{2})^n + 1}{(-\frac{1}{2})^n + 1} = \frac{-2 + (-2)^n}{1 + (-2)^n}$$

別表現

$$a_n = \frac{-2(-\frac{1}{2})^n + 1}{(-\frac{1}{2})^n + 1} = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n}$$

分母分子に $(-2)^n$ をかけた分母分子 $\times 2^n$

[3]

$$(1) \overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$= s(0, 0, 2) + t(-1, -1, -2)$$

$$= (-t, -t, 2s - 2t)$$

ここで、

$$A(0, 1, 0)$$

$$B(0, 1, 2)$$

$$C(-1, 0, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (0, 1, 0) + \overrightarrow{AH}$$

$$= (-t, -t+1, 2s-2t)$$

$$\therefore H(-t, -t+1, 2s-2t)$$

(2) 3点 A, B, C を通る平面 と 直線 OH が直交する とき、

$$(ア) \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{つまり} \quad \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

から

$$(イ) \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC} \quad \text{つまり} \quad \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \quad \text{から、}$$

$$(ア) \text{は、} (-t)(0) + (-t+1)(0) + (2s-2t)(2) = 0$$

$$\therefore s = t \quad \text{① とおす。}$$

$$(イ) \text{は、} (-t)(-1) + (-t+1)(-1) + (2s-2t)(-2) = 0$$

$$\therefore (t) + (t-1) - 4s + 4t = 0$$

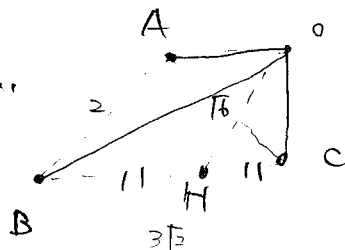
$$\therefore 6t - 4s = 1 \quad \text{② とおす。}$$

$$\text{①② より } s = t = \frac{1}{2} \quad \text{と求まる。}$$

[3]

(2) $S = \tau = \frac{1}{2}$ より、 H の座標は、

$$H \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

(3) $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ より、点 H は、 $\triangle ABC$ の中点である。 $|\vec{OH}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。求める体積 V は、

$$V = \frac{1}{3} (\triangle ABC \text{ の面積}) |\vec{OH}| \quad \text{である。}$$

 $S = \triangle ABC$ の面積とすると、余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{(2)^2 + (\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2}{(2)(2)(\sqrt{6})} = \frac{-8}{4\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{より、} \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because 0^\circ < \angle BAC < 180^\circ \text{ であり } \sin \angle BAC > 0)$$

$$\therefore \text{よって、} S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} (2) (\sqrt{6}) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \right) = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{よって、} V = \frac{1}{3} (\sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3}$$

2026 北大文系数学

④ (x) ③ の目、持ち点 3 倍

(y) ⑤ の目、持ち点 5 倍

(z) ③, ⑤ 以外の目、持ち点 2 倍

起 = 3 確率 $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{6}$
 $\frac{4}{6}$

∴ 起 = 3 回数を順に x, y, z とおく。

(1) 条件を満たすには、z = 2 または 3 であればよいから、

求める確率は、 ${}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^3$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4}{6^3}$$

$$= \frac{20}{27}$$

———— //

(2) 4 回試行して、最後の持ち点が奇数となるには、

$$(x, y, z) = (4, 0, 0) (0, 4, 0) (0, 0, 4) \\ (2, 2, 0) (2, 0, 2) (0, 2, 2)$$

の場合があるから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 + 4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ + 4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 + 4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6^4} (1 + 1 + 2^8 + 2 \cdot 3 + 2^5 \cdot 3 + 2^5 \cdot 3)$$

$$= \frac{1}{6^4} (2) (1 + 2^7 + 3 + 2^5 \cdot 3)$$

$$= \frac{19}{54}$$

———— //

北大文系数学

- ④ (ア) ③ の目 → 持点 3倍 $\frac{1}{6}$
 (イ) ⑤ の目 → 持点 5倍 起る確率 $\frac{1}{6}$
 (ウ) ①②④⑥ → 持点 2倍 $\frac{4}{6}$

(1) 3回試行したとき、最後の持点が4の倍数になるには、
 (i) (ウ) が3回 (ii) (ウ) が2回, (ア)と(イ)が各1回
 起る必要がある。

求める確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^2$$

$$= \frac{4^3 + 3 \cdot 2 \cdot 4^2}{6^3} = \frac{2^5 (2+3)}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{20}{27}$$

(2) 問題の条件を満たすのは、以下の場合である。

(a) (ウ) が4回

(b) (ウ) が2回, (ア) が2回

(c) (ウ) が2回, (イ) が2回

(d) (ア) が4回

(e) (イ) が4回

(f) (ア) × ≥ 2
 (イ) × ≥ 2 が不足

よって、求める確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 + {}_4C_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_4C_2 \left(\frac{4}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$= \frac{1}{6^4} (2^8 + 2^5 \cdot 3 + 2^5 \cdot 3 + 1 + 1) = \frac{25}{72}$$