I

(1) $P(x)=3x^4+7x^3+ax^2+bx+4$ とおくと、

$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+3x-5$

$=(x+3)(x-1)Q(x)+3x-5$ とできる。

$P(1)=3(1)-5=-2$ より、

$3+7+a+b+4=-2$ $\therefore a+b=-16$ ―①

$P(-3)=3(-3)-5=-9-5=-14$ より、

$P(-3)=3(-3)^4+7(-3)^3+a(-3)^2+b(-3)+4$

$=(-3)^3(-3\cdot3+7)+9a-3b+4$

$=-27(-2)+9a-3b+4$

$=54+9a-3b+4=58+9a-3b$ となり、

$58+9a-3b=-14$ $\therefore 9a-3b=-72$

$\therefore 3a-b=-24$ ―②

①②より $a=-10$, $b=-6$

$\therefore (a, b)=(-10, -6)$

(2) $(左辺)=\dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}$ となり、

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{12}{7}$ を解けばよい。

$(x+4)-(x+1)=\dfrac{12}{7}(x+1)(x+4)$

$\therefore 3=\dfrac{12}{7}(x+1)(x+4)$

$\therefore (x+1)(x+4)=\dfrac{7}{4}$

$x^2+5x+4=\dfrac{7}{4}$

$4x^2+20x+9=0$

$(2x+9)(2x+1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{1}{2}$

I

(2) 別解 … 通分する

$$(\text{左辺}) = \frac{(x+3)(x+4)+(x+1)(x+4)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{(x^2+7x+12)+(x^2+5x+4)+(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{3x^2+15x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

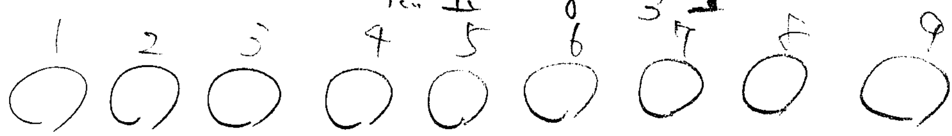
$$= \frac{3}{(x+1)(x+4)}$$ となり、

$\frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{12}{7}$ $\therefore 3\times 7 = 12(x+1)(x+4)$

$\therefore 7 = 4(x^2+5x+4)$ $\therefore 4x^2+20x+9=0$

$\therefore (2x+9)(2x+1)=0$ $\therefore x = -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$ //

(3) 白玉 … w 6コ　赤玉 … r 3コ



全事象は 9! 通り

実験 $k=3$　$\underbrace{3!}_{r3つ} \times \underbrace{6!}_{w6つ}$ 通り

$k=4$

$$\underbrace{{}_3C_2}_{r2つ取り出す} \times \underbrace{{}_6C_1}_{w1つ取り出す} \times \underbrace{3!}_{前の3つ並べる} \times \underbrace{5!}_{w5つ並べる}$$

一般に、k回目に3つ目のrを取り出すのは、

$$\underbrace{{}_3C_2}_{r2つ取り出す} \times \underbrace{{}_6C_{k-3}}_{k-1回目までのw取り出す} \times \underbrace{(k-1)!}_{(k-1)回目までの玉を並べる} \times \underbrace{{}_1C_1}_{3つ目のr} \times \underbrace{\{6-(k-3)\}!}_{残りのwを並べる}$$

I (3)

$= {}_3C_2 \times {}_6C_{k-3} \times (k-1)! \times (9-k)!$ 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_6C_{k-3} \times (k-1)! \times (9-k)!}{9!}$$

$$= \frac{3 \times \frac{6!}{(k-3)!(6-k+3)!} \times (k-1)! \times (9-k)!}{9!}$$

$$= \frac{3 \times 6! \times \frac{(k-1)!}{(k-3)!} \times \frac{(9-k)!}{(9-k)!}}{9!}$$

$$= \frac{3 \times 6! \times (k-1)(k-2)}{9!}$$

$$= \frac{3(k-1)(k-2)}{9 \times 8 \times 7}$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{168}$$

//

II $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$ — ①

(1) $a_2 = 2a_1 + (-1)^1 = 2(1) - 1 = 1$

$a_3 = 2a_2 + (-1)^2 = 2(1) + 1 = 3$

$a_4 = 2a_3 + (-1)^3 = 2(3) - 1 = 5$

(2) $b_{n+1} = 2^{-(n+1)} a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} a_{n+1}$ であることから、

①の両辺を 2^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2 \cdot 2^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot (-1)^n$$

$$\therefore\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) $2 \leqq n$ のとき、

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 2^{-1}(a_1) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left\{\frac{2-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-(-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}\right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって、$a_n = 2^n b_n = 2^n\left\{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}\right\}$

$$= \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

III

(1) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とおく。

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ より、$f'(x) = 0$ とすると

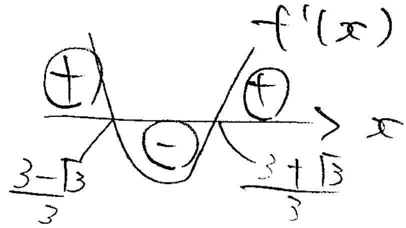
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

ここで、

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2} = \frac{2(3+\sqrt{3}) - 3(3)}{6} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{9}}{6} > 0$$

より、$\frac{3}{2} < \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ であることが分かる。

x	0	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{3}{8}$



$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{27}{8} - \frac{27}{4} + 3$$
$$= \frac{27-54}{8} + 3 = \frac{-27}{8} + \frac{24}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$= \left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)(x-1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$
$$= (0)(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)$$
$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} - 1\right)$$
$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ が
$3x^2 - 6x + 2 = 0$
つまり
$x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$
の解であることを利用する。

$$\therefore (M, m) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{3}{8}\right)$$

III

(2) $20^{25} < 25^n$ の両辺に常用対数をとると，

$\log_{10} 20^{25} < \log_{10} 25^n$ —① となる。ここで，

$$\log_{10} 20^{25} = 25 \log_{10} 20$$
$$= 25 (\log_{10} 10 + \log_{10} 2)$$
$$= 25 (1 + \log_{10} 2)$$
$$\log_{10} 25^n = n \log_{10} 25$$
$$= n \left(\log_{10} \frac{100}{4}\right)$$
$$= n (\log_{10} 100 - \log_{10} 4)$$
$$= n (2 - 2\log_{10} 2)$$ となるので，

①は，$25(1+\log_{10} 2) < n(2 - 2\log_{10} 2)$

$\therefore \quad n > \dfrac{25(1+\log_{10} 2)}{2 - 2\log_{10} 2}$ $(\because 2 - 2\log_{10} 2 > 0)$

$\therefore \dfrac{25}{2}\left(\dfrac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2}\right) < n$ —② となる。

$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より，

$$\begin{cases} 1.3 < 1 + \log_{10} 2 < 1.31 \\ \dfrac{1}{0.7} < \dfrac{1}{1 - \log_{10} 2} < \dfrac{1}{0.69} \end{cases}$$ が分かり，

$$\frac{1.3}{0.7} < \frac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2} < \frac{1.31}{0.69}$$

$$\therefore \frac{13}{7} < \frac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2} < \frac{131}{69}$$

$$\therefore \frac{13}{7} \cdot \frac{25}{2} < \frac{25}{2}\left(\frac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2}\right) < \frac{25}{2}\left(\frac{131}{69}\right)$$

$$\therefore 23.2\cdots < \frac{25}{2}\left(\frac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2}\right) < 23.7\cdots$$

よって，②より
n の min は，
$n = 24$ //

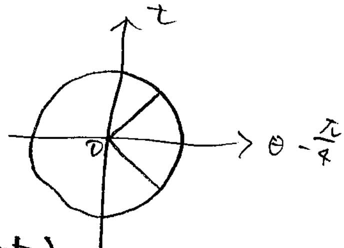
Ⅲ

(3) $t = \sin\theta - \cos\theta$ の取りうる値の範囲を求める。

$t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ となり、$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ から、

$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ である。



したがって、$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -1 \leqq t \leqq 1$ である。

また、$t = \sin\theta - \cos\theta$ の両辺を2乗して、

$t^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$\therefore t^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta = 1 - t^2$

$\therefore\ \sin 2\theta = 1 - t^2$ となる。

したがって、

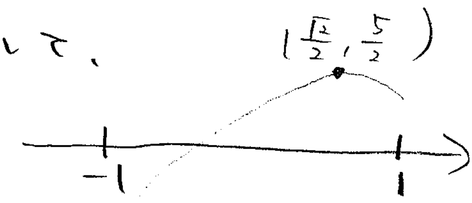
$Y = \sin 2\theta + \sqrt{2}(\sin\theta - \cos\theta) + 1$

$= (1 - t^2) + \sqrt{2}(t) + 1$

$= -t^2 + \sqrt{2}t + 2 = -\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$-1 \leqq t \leqq 1$ であることを考慮して、



Y の Max は、

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときで $M = \frac{5}{2}$ である。

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ より、$\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ $\therefore\ \theta = \frac{5}{12}\pi$

$\therefore\ (M, \theta) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{12}\pi\right)$ //

IV

(1) $x^2-3y^2 \geqq 0$

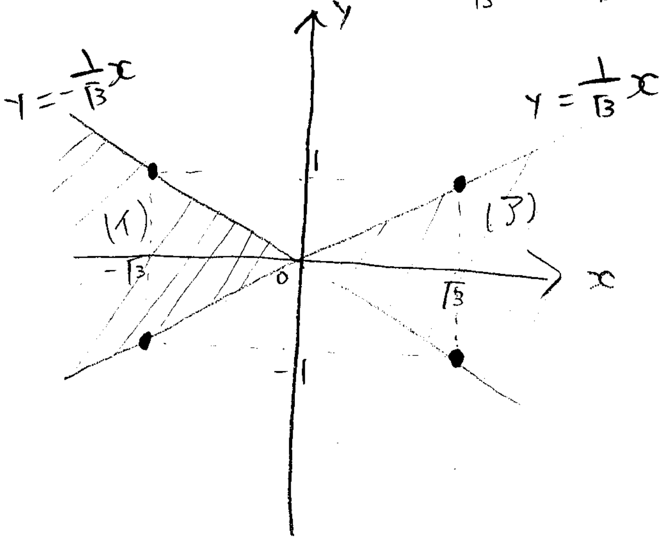
$(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y) \geqq 0$ は次の2つの場合に分けられる

(ア) $x+\sqrt{3}y \geqq 0$ かつ $x-\sqrt{3}y \geqq 0$

つまり $y \geqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ かつ $y \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}x$

(イ) $x+\sqrt{3}y \leqq 0$ かつ $x-\sqrt{3}y \leqq 0$

つまり $y \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ かつ $y \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x$



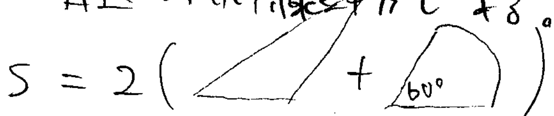
求める領域は左図の斜線部であり、境界線を含む。

(2) $x^2+y^2-4x \leqq 0$ は、

$(x-2)^2+y^2 \leqq 4$ より、

中心 $(2, 0)$、半径2の円の内部と周上を表す。

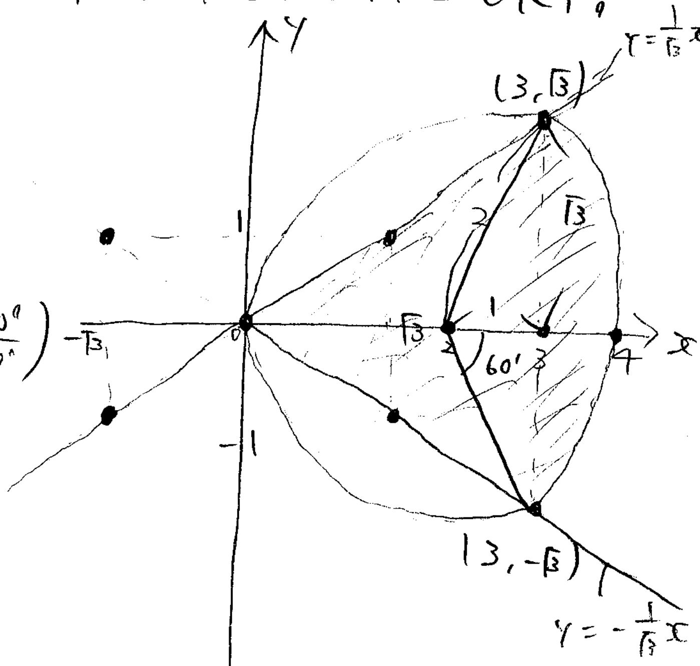
求める面積Sは右図の斜線部である。



$= 2\left\{\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})+\pi(2)^2 \cdot \frac{60°}{360°}\right)$

$= 2\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$

$= \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ //



V $f(x) = e^{-x}\sin x$, $g(x) = e^{-x}\cos x$

(1) $f'(x) = e^{-x}(\sin x)' + (e^{-x})'\sin x$

$$= \underline{e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x} \,//$$

$g'(x) = e^{-x}(\cos x)' + (e^{-x})'\cos x$

$$= \underline{e^{-x}(-\sin x) - e^{-x}\cos x} \,//$$

(2) $I_n = \int_0^{n\pi} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

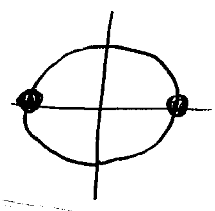
$$= \int_0^{n\pi} -\frac{1}{2}\{f'(x)+g'(x)\}dx$$

$f'(x)+g'(x)$

$= -2\sin x e^{-x}$

$\sin n\pi = 0$

$\cos n\pi = (-1)^n$



$$= -\frac{1}{2}\int_0^{n\pi} f'(x)+g'(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)\right]_0^{n\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right]_0^{n\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\{(e^{-n\pi}\sin n\pi + e^{-n\pi}\cos n\pi) - (e^0\sin 0 + e^0\cos 0)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}\cdot 0 + e^{-n\pi}(-1)^n - e^0\cdot 0 - e^0\cdot 1\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}(-1)^n - 1\}$$

$$= \underline{\frac{1-e^{-n\pi}(-1)^n}{2}} \,//$$