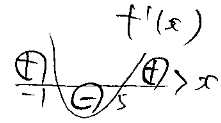
北海道大学 2025 文系数学

1 $C: y = f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5)$

$= 3(x-5)(x+1)$ となり、

$f'(x) = 0$ とすると $x = 5, -1$





| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

極大値 $= f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 - 15(-1) + 30$

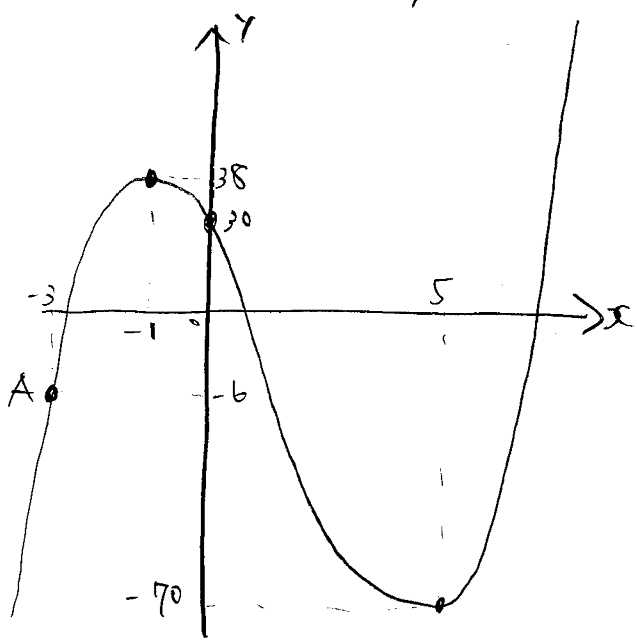
$= -1 - 6 + 15 + 30 = 38$ ($x = -1$ のとき) //

極小値 $= f(5) = 5^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 30$

$= 5^2(5-6) - 15(5-2)$

$= -25 - 45 = -70$ ($x = 5$ のとき) //

(2) $A(-3, -6)$ とする。





求める直線 $\ell$ を

(ア) 点Aが接点となる

(イ) 点A以外に接点がある

の2つの場合に分けて考える。

北大 2025 文系

1

(2) (ア) $f'(-3) = 3(-3-5)(-3+1)$

$= 3(-8)(-2)$

$= 48$ より、$\ell$ の1つは、

$y-(-6) = 48(x+3)$

$\therefore\ y = 48x + 138$

(イ) 接点を $(t,\ t^3-6t^2-15t+30)$ とおく。$(t \neq -3)$

接線は $y - f(t) = f'(t)(x-t)$ つまり、

$y-(t^3-6t^2-15t+30) = (3t^2-12t-15)(x-t)$

$\therefore\ y = 3(t^2-4t-5)x - 2t^3+6t^2+30$ と表され、 ―①

$\ell$ は点Aを通るから、

$-6 = 3(t^2-4t-5)(-3) - 2t^3+6t^2+30$

$\therefore\ 0 = -2t^3-3t^2+36t+81$

$\therefore\ 2t^3+3t^2-36t-81=0$

$\therefore\ (t+3)(2t^2-3t-27)=0$

$\therefore\ (t+3)(t+3)(2t-9)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 3 & -36 & -81 \\ & & -6 & 9 & 81 \\ \hline & 2 & -3 & -27 & 0 \end{array}$$

$t \neq -3$ より $t = \frac{9}{2}$

$f'\left(\frac{9}{2}\right) = 3\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}+1\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{33}{4}$

① に $t = \frac{9}{2}$ を代入して、$\ell$ は

$y = -\frac{33}{4}x - \frac{123}{4}$

(ア)(イ)より $\ell$ は $\underline{y = 48x+138}$, $\underline{y = -\frac{33}{4}x - \frac{123}{4}}$

北大数学 2025

2 $2 \leqq a < b < c \leqq 6$ —① $a, b, c$ は整数 —②

(1) $c = 6$ のとき、$a + b > 6$ を満たすのは、

$(a, b) = (2, 5)(3, 4)(3, 5)(4, 5)$

$c = 5$ のとき、$a + b > 5$ を満たすのは、

$(a, b) = (2, 4)(3, 4)$

$c = 4$ のとき、$a + b > 4$ を満たすのは、

$(a, b) = (2, 3)$

$c = 2, 3$ のとき、①②を満たせない。

よって、

$$\boxed{(a, b, c) = (2, 5, 6)(3, 4, 6)(3, 5, 6)(4, 5, 6)(2, 4, 5)(3, 4, 5)(2, 3, 4)}$$ //

(2) $c = 6$ のとき、$a^2 + b^2 \leqq 36$ を満たすのは、

$(a, b) = (4, 5)$

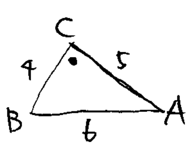
$c = 5$ のとき、$a^2 + b^2 \leqq 25$ を満たすのは、

$(a, b) = (3, 4)$

$c = 4$ のとき、$a^2 + b^2 \leqq 16$ を満たす $(a, b)$ はない。

よって $\underline{(a, b, c) = (4, 5, 6)(3, 4, 5)}$ //

(3) $(a, b, c) = (4, 5, 6)$ のとき、




余弦定理より、

$$\cos\angle ACB = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \underline{\frac{1}{8}}$$

$(a, b, c) = (3, 4, 5)$ のとき、$3^2 + 4^2 = 5^2$ より、


$\cos\angle ACB = \cos 90^\circ = 0$

北大 2025

3 $a_1 = 1,\ a_2 = 3$

$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0$ — ①

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$

$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} b_n$ が成り立つことを示す。

① は $(n+1)a_{n+2} = (2n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$ とできる。

(左辺) − (右辺)

$= b_{n+1} - \frac{n+2}{n+1} b_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)(a_{n+1} - a_n)$

$= a_{n+2} - \left(1 + \frac{n+2}{n+1}\right)a_{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)a_n$

$= a_{n+2} - \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)a_{n+1} + \frac{n+2}{n+1}a_n$ (① を利用して $a_{n+2}$ を消去)

$= \left(\frac{2n+3}{n+1}a_{n+1} - \frac{n+2}{n+1}a_n\right) - \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)a_{n+1} + \frac{n+2}{n+1}a_n$

$= 0$ ∴ (左辺) = (右辺) となり、

$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} b_n$ が成り立つ。 //

(2) $b_2 = \frac{3}{2} b_1$

$b_3 = \frac{4}{3} b_2$

$b_4 = \frac{5}{4} b_3$

⋮

$b_n = \frac{n+1}{n} b_{n-1}$

$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} b_n$

辺々かけて、

$(b_2)(b_3)(b_4)\cdots(b_n)(b_{n+1})$

$= \left(\frac{3}{2}b_1\right)\left(\frac{4}{3}b_2\right)\left(\frac{5}{4}b_3\right)\cdots\left(\frac{n+1}{n}b_{n-1}\right) \times \left(\frac{n+2}{n+1}b_n\right)$

$\therefore b_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)(b_1)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$\therefore b_{n+1} = (b_1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$

ここで、$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ より、

$b_{n+1} = 2\left(\frac{n+2}{2}\right) = n+2$

$\therefore b_n = n+1$ となる。

北大 2025

3

(2) $b_n = n+1$ より、$2 \leqq n$ において

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$= 1 + (2+3+4+\cdots+n)$$ （→ 初項1、公差1、項数 $n$ の等差数列と見なせる）

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$ （これは $n=1$ のときも成り立つ。）

(3) $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)-(n)}{n(n+1)} \times 2 = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ より、

$$\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{225} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{224} - \frac{1}{225}\right) + \left(\frac{1}{225} - \frac{1}{226}\right)\right.$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{226}\right)$$

$$= 2\left(\frac{225}{226}\right) = \frac{225}{113}$$

北大2025

$\boxed{4}$

$f(nx)=\{f(x)\}^n$ — ①　$x$実数　$n$整数　$f(1)=2$

$f(x)\neq 0$

(1)　$f(n)\leqq 100$ のとき、①を用いて、

$f(n)=f(n\cdot 1)=\{f(1)\}^n\leqq 100$

$\therefore\quad 2^n\leqq 100$

ここで $2^6=64$，$2^7=128$ より $\underline{n=6}$ が求める

最大の整数 $n$ である。

(2)　すべての実数 $x$ は $x=2y$（$y$実数）と表すことができ、

①より、$f(x)=f(2y)=\{f(y)\}^2$ とできる。

ここで $f$(実数)$\neq 0$ より $f(y)\neq 0$ であることから、

$f(x)=\{f(y)\}^2>0$ である。

よって、すべての実数 $x$ について、$f(x)>0$ である。

(3)　①に $n=4$，$x=0.25$ を代入して、

$f(4\times 0.25)=\{f(0.25)\}^4$

$\therefore\quad f(1)=\{f(0.25)\}^4$

$\therefore\quad 2=\{f(0.25)\}^4$ となる。

ここで $f(0.25)>0$（$\because$ (2)）より、

$\underline{f(0.25)=2^{\frac{1}{4}}}$ となる。

北大2025

4

(4) $\alpha$が有理数であることから、$\alpha = \frac{q}{p}$ とおく。

ただし、$p$と$q$は互いに素である整数である。

①に $x = \frac{q}{p}$，$n = p$ を代入して、

$f\left(p \times \frac{q}{p}\right) = \left\{f\left(\frac{q}{p}\right)\right\}^p$

$\therefore\ f(q) = \{f(\alpha)\}^p$ — ②

ここで ①に $x = 1$．$n = q$ を代入すると、

$f(q) = \{f(1)\}^q$

$= 2^q$ — ③

② ③より $\{f(\alpha)\}^p = 2^q$　$(f(\alpha) > 0)$

$\therefore\ f(\alpha) = \sqrt[p]{2^q} = 2^{\frac{q}{p}} = 2^{\alpha}$ //

注意書き

4

(2) $f(x) > 0$ を示すために、$(実数)^2 > 0$ (実数$\neq 0$)

を用いた。2乗を作り出すために $x = 2y$ と設定した

(3) $f(0.25)$を作り出すために、①の左辺の$f(x)$に

着目して、$x = 0.25$ として考えた。また $f(1) = 2$ を

使うために $n = 4$ とし、$nx = 4 \times 0.25 = 1$ となるよう

にした。

(4) $f(\alpha) = f\left(\frac{q}{p}\right)$を作り出すために、(3)と同様、$x = \frac{q}{p}$ とした。

北大 文系数学 2025　　注意書き

[1]

(2) この問いは(ア)、(イ)に分けて考えなくてもよい。
接点$(t, f(t))$と設定し、接線がA$(-3, -6)$を通ることを用いて計算をすれば、tについての3次方程式が生まれ、「$t=-3$を重解に持つ」つまり「$(t+3)^2$(tの1次式)$=0$の形になるはず」であることから、計算をスムーズに行える。$t=-3$は、点Aのx座標の$-3$に一致する。もちろん、$2t^3+3t^2-36t-81=0$を組み立て除法を用いて因数分解していってもよい。

[2]

(1)(2) 地道に書き出していくしか方法がない。

(3) $\cos\angle ACB = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$に(2)の結果を当てはめるだけ。

[3]

(1) $b_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}b_n$が成り立つことを示すには、$b_{n+1} - \dfrac{n+2}{n+1}b_n = 0$を示せばよく、数列$\{a_n\}$についての関係式(答案では①)が与えられていることから、$b_{n+1}$と$b_n$を消去して考えていけばよい。

(2) 答案のように、$b_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}b_n$を繰り返し用いて、$b_n$の一般項を求めてもよいが、$b_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}b_n$の両辺に$\dfrac{1}{n+2}$をかけて、
$\dfrac{1}{n+2}b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}b_n$とし、$c_n = \dfrac{1}{n+1}b_n$とすると、
$c_{n+1} = c_n$となり、$c_n = c_{n-1} = c_{n-2} = \cdots = c_1$から、
$c_n = c_1 = \dfrac{1}{2}b_1 = \dfrac{1}{2}(a_2 - a_1) = \dfrac{1}{2}(3-1) = 1$
$c_n = 1$より、$1 = \dfrac{1}{n+1}b_n \quad \therefore b_n = n+1$とできる。