

I

$$(1) \quad f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \quad \because f(-1) = f(1) \\ = f(2) = f(3) = 1 \quad \therefore \text{対称性} \text{ あり}$$

$$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) + 1 \quad \because \text{対称性}$$

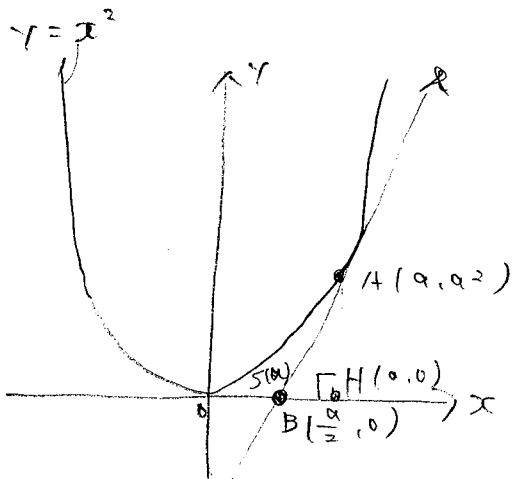
$$f(x) = a(x^2-1)(x^2-5x+6) + 1 \\ = a(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6) + 1 \\ = ax^4 - 5ax^3 + 5ax^2 + 5ax - 6a + 1 \quad \because \text{対称性}$$

$$-6a + 1 = 0 \quad \because \text{対称性} \quad a = \frac{1}{6} \quad \because \text{対称性}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) + 1 \quad \because \text{対称性}$$

$$f(4) = \frac{1}{6}(5)(3)(2)(1) + 1$$

$$= 5 + 1 = 6 \quad \therefore f(4) = 6$$

(2) a は正の整数

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

x は任意の a に対して成立する。

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$\therefore \text{直線} y = (2a)x - a^2 \quad \because \text{対称性}$$

点 B は x 軸上 $y = 0$ となる $x = \frac{a}{2}$ である。

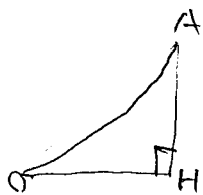
$$B\left(\frac{a}{2}, 0\right) \quad \because \text{対称性}$$

点 $H(a, 0)$ である。

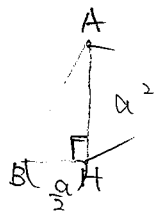
I

(2) 積立

$$S(\alpha) =$$



-



$$= \int_0^{\alpha} x^2 dx - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) (\alpha^2 - 0)$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\alpha} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) (\alpha^2)$$

$$= \frac{1}{3} \alpha^3 - \frac{1}{4} \alpha^3$$

$$= \frac{4-3}{12} \alpha^3 = \frac{\alpha^3}{12} \text{ とわかる。}$$

$S(\alpha)$ が整数となる最小の α は、 $12 = 2^2 \cdot 3$ より、

$$\alpha_0 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore S(\alpha_0) = S(6) = \frac{6^3}{12} = 18$$

$$\therefore \underline{(\alpha_0, S(\alpha_0)) = (6, 18)}$$

(3) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし考える。

実数 s ($0 \leq s < 1$) を用いて、
 $\exists P: PF = (1-s):s$ とする。

$$\vec{FP} = s \vec{FE}$$

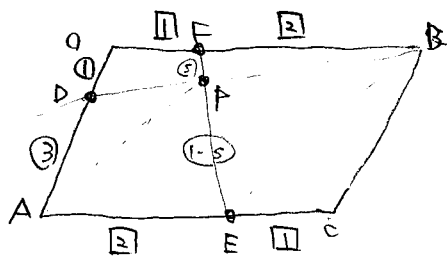
$$\therefore \vec{OP} - \vec{OF} = s(\vec{OE} - \vec{OF})$$

$$\therefore \vec{OP} = s(\vec{OE}) + (1-s)\vec{OF}$$

$$\therefore \vec{OP} = s\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + (1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$= (s)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s\right)\vec{b}$$

$$= (s)\vec{a} + \frac{1}{3}(s+1)\vec{b} \text{ ① とわかる。}$$



I

(13) 続き

点Pは線分BD上に存在するから、実数k (0 < k < 1) を用いて、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OB} + k(\vec{BD}) \\ &= \vec{OB} + k(\vec{OD} - \vec{OB}) \\ &= \vec{b} + k\left(\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}k\right)\vec{a} + (1-k)\vec{b} \quad \text{--- (2) と同じ。} \end{aligned}$$

\vec{a} と \vec{b} は一次独立だから (1) と (2) から係数を比較して、

$$\begin{cases} s = \frac{1}{4}k \\ \frac{s+1}{3} = 1-k \end{cases} \quad \therefore s = \frac{2}{13}$$

$$\therefore EP : PF = (1-s) : s = \frac{11}{13} : \frac{2}{13} = 11 : 2$$

I (13) 別解

2直線 CA, BD の交点を Q とすると

$\triangle OBD \sim \triangle AQD$ かつ

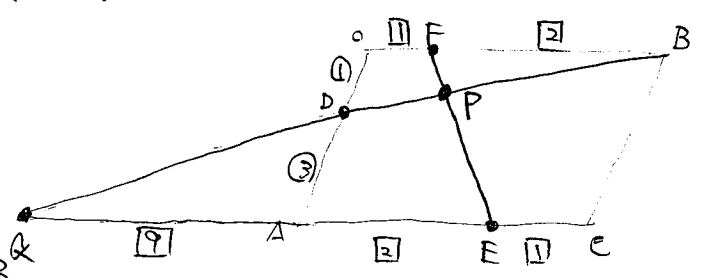
$$OB : AQ = OD : AD$$

と"え"。

また、 $\triangle EPQ \sim \triangle FPB$

$$\therefore EP : FP = EQ : FB$$

$$= 11 : 2$$



II

$$a_n = 7 \cdot 2^{2n-1} + 3^{3n-1} \quad \text{と仮定}$$

(3) $n = 1$ のとき、

$$a_1 = 7 \cdot 2^1 + 3^2 = 14 + 9 = 23 \quad \text{より}$$

$n = 1$ のとき、 a_n は 23 の倍数である。

(4) $n = k$ のとき、 a_k が 23 の倍数であると仮定すると、

$$7 \cdot 2^{2k-1} + 3^{3k-1} = 23m \quad (m \text{ 整数}) \quad \text{と仮定して、}$$

①

$n = k+1$ のとき、

$$a_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-1} + 3^{3(k+1)-1}$$

$$= 7 \cdot 2^{2k+1} + 3^{3k+2}$$

$$= 7 \cdot 2^{2k+1} + 3^3 \cdot 3^{3k-1} \quad \text{①を利用}$$

$$= 7 \cdot 2^{2k+1} + 27(23m - 7 \cdot 2^{2k-1})$$

$$= 23(27m) + 7 \cdot 2^{2k+1} - 27 \cdot 7 \cdot 2^{2k-1}$$

$$= 23(27m) + 7 \cdot 2^{2k-1}(2^2 - 27)$$

$$= 23(27m) - 7 \cdot 2^{2k-1}(23)$$

$$= 23(27m - 7 \cdot 2^{2k-1}) \quad \text{より}$$

m と k は整数である。

$n = k+1$ のとき、 a_n は 23 の倍数である。

(3)(4)より、 $n = 1, 2, 3, \dots$ において a_n は 23 の倍数である。

///

III

(1) (3) $c=1$ $a \neq b$, $a+b=1$ \Rightarrow a, b は 0 以外の整数 $\therefore (a, b)$ はなし。

(5) $c=2$ $a \neq b$, $a+b=2 \therefore (a, b) = (1, 1)$

(7) $c=3$ $a \neq b$, $a+b=3 \therefore (a, b) = (1, 2) (2, 1)$

(9) $c=4$ $a \neq b$, $a+b=4 \therefore (a, b) = (1, 3) (2, 2) (3, 1)$

(11) $c=5$ $a \neq b$, $a+b=5 \therefore (a, b) = (1, 4) (2, 3)$
 $(3, 2) (4, 1)$

(13) $c=b$ $a \neq b$, $a+b=b$

$\therefore (a, b) = (1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)$

(15) \sim (13) \forall $a+b=c$ b 以外の a は、

$$1+2+3+4+5 = 15 \text{ (通り)}$$

(a, b, c) の全事象は b^3 通り \forall 。

求める確率は $\frac{15}{b^3} = \frac{5}{172}$

III

$$\begin{aligned}
 (2) k &= \log_7(7^p \cdot 17^q) = \log_7 7^p + \log_7 17^q \\
 &= p + q \log_7 17 \\
 &= p + q(1.456) \quad \text{と} \text{す}。
 \end{aligned}$$

∴

$$2023 = 7^1 \cdot 17^2 \text{ 対} \text{し} \quad p=1, q=2 \text{ と} \text{す} \text{が} \text{、}$$

$$k = 1 + (2)(1.456) = 3.912 \quad \text{と} \text{す}。$$

求める数を、 k の値が 3.912 より初めて大きくなる (p, q)

の組合せを考えることに、求めていく。

(3) $q = 0$ とすると、 $k = p$ とす。 $p = 4$ のとき、 k の $\min 4$

(3) $q = 1$ とすると、 $k = p + 1.456$ とす。 $p = 3$ のとき、 k の $\min 4.456$

(4) $q = 2$ とすると、 $k = p + 2.912$ とす。 $p = 4$ のとき、 k の $\min 5.824$

(I) $3 \leq q$ とすると、 $k = p + q(1.456)$
 $\geq p + 3(1.456) > 4$ とす。

したがって

(3) ~ (I) 対し $p = 4, q = 0$ のとき

(求める数) = $7^4 = 2401$

//

III

(3) $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, $\sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$

与上述不等式，

$$2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) - \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 - \cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta \geq 0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta) \geq 0$$

$$\therefore \sin 2\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta \geq 0 \quad \& \tau \text{ " } \neq \} \circ$$

$$\begin{aligned} [\sqrt{3}\pi] &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \right) \\ &= 2 \left(\sin 2\theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq 0 \quad \& \text{ II,} \end{aligned}$$

$$\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) \geq 0 \quad \& \text{ II} \}$$

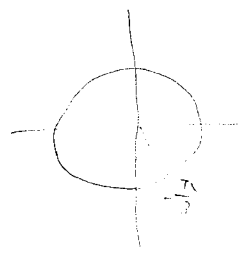
$$\Rightarrow \tau \text{ " } 0 \leq \theta \leq \pi \quad \& \text{ II}, \quad 0 \leq 2\theta \leq 2\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad \& \text{ II,}$$

$$0 \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq 2\theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$



————— //

IV

$x^2 - 3x - 2 = 0$ は $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ とおけるから、

解と係数の関係を用いて、 $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = -2$ とおける。

(1) 解と係数の関係より $\alpha^2 + \beta^2 = -a$, $\alpha^2\beta^2 = b$ とおける。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 3^2 - 2(-2)$$

$$= 9 + 4$$

$$= 13 \text{ より } 13 = -a \quad \therefore a = -13$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (-2)^2 = 4 \text{ より } b = 4$$

$$\therefore (a, b) = (-13, 4)$$

(2) 解と係数の関係より $\alpha^6 + \beta^6 = -c$, $\alpha^6\beta^6 = d$ とおける。

$$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2(\alpha^3\beta^3)$$

$$= \left\{ (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \right\}^2 - 2(\alpha\beta)^3$$

$$= \left\{ (3)^3 - 3(-2)(3) \right\}^2 - 2(-2)^3$$

$$= (27 + 18)^2 - 2(-8)$$

$$= (45)^2 + 16$$

$$= (40 + 5)^2 + 16$$

$$= 1600 + 400 + 25 + 16$$

$$= 2041 \quad \therefore -c = 2041 \quad \therefore c = -2041$$

$$\alpha^6\beta^6 = (\alpha^2\beta^2)^3 = (4)^3 = 64 \quad \therefore d = 64$$

$$\therefore (c, d) = (-2041, 64)$$
