2023 小樽商大

I

(1) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ が $f(-1) = f(1)$

$= f(2) = f(3) = 1$ であることから、

$f(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) + 1$ とでき、

$f(x) = a(x^2-1)(x^2-5x+6) + 1$

$= a(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6) + 1$

$= ax^4 - 5ax^3 + 5ax^2 + 5ax - 6a + 1$ となり、

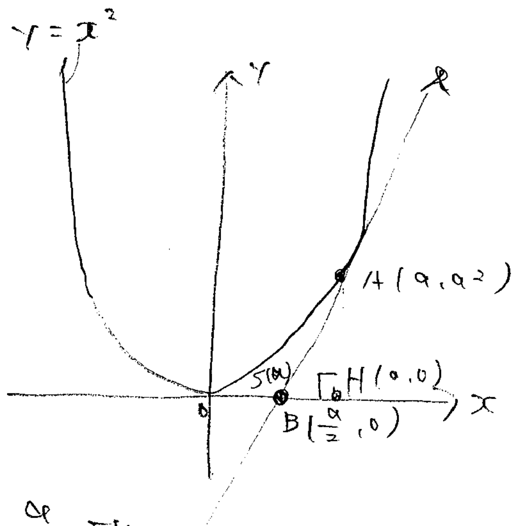
$-6a + 1 = 0$ より $a = \dfrac{1}{6}$ となる。

$f(x) = \dfrac{1}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) + 1$ より、

$f(4) = \dfrac{1}{6}(5)(3)(2)(1) + 1$

$= 5 + 1 = 6$ $\therefore f(4) = 6$ //

(2) a は正の整数



$y = x^2$

$y' = 2x$

l は傾き $2a$ であることから、

$y - a^2 = 2a(x - a)$

$\therefore l : y = (2a)x - a^2$ となる。

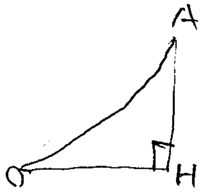
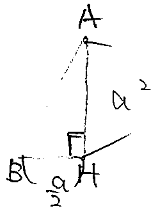
点Bは l に $y=0$ を代入して $x = \dfrac{a}{2}$ より、

$B\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ となる。

点H $(a, 0)$ とすると、

I

(2) 続き

$S(a) =$  $-$ 

$$= \int_0^a x^2\,dx - \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)(a^2 - 0)$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)(a^2)$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3$$

$$= \frac{4-3}{12}a^3 = \frac{a^3}{12}$$ となる。

$S(a)$が整数となる最少の a は、$12 = 2^2 \cdot 3$ より、

$a_0 = 2 \cdot 3 = 6$

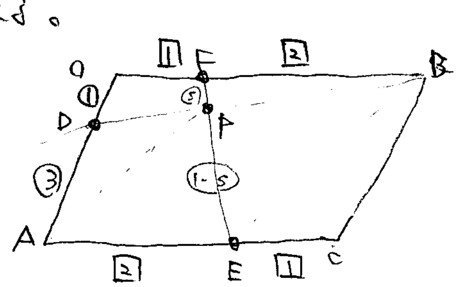
このとき、$S(a_0) = S(6) = \frac{6^3}{12} = 18$

よって $\underline{(a_0, S(a_0)) = (6, 18)}$ //

(3) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として考える。

実数 s $(0 < s < 1)$ を用いて、

$EP : PF = (1-s) : s$ とおくと、



$\overrightarrow{FP} = s\overrightarrow{FE}$

$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF} = s(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF})$

$\therefore \overrightarrow{OP} = s(\overrightarrow{OE}) + (1-s)\overrightarrow{OF}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = s\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + (1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$= (s)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s\right)\vec{b}$

$= (s)\vec{a} + \frac{1}{3}(s+1)\vec{b}$ -① となる。

I

(3) 続き

点Pは線分BD上にあることから、実数k ($0<k<1$) を用いて、

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + k(\overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{OB} + k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})$

$= \vec{b} + k(\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b})$

$= (\frac{1}{4}k)\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ …② となる。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立より ① と ② から係数を比較して、

$\begin{cases} s = \frac{1}{4}k \\ \frac{s+1}{3} = 1-k \end{cases}$ $\therefore$ $s = \frac{2}{13}$

よって、$EP : PF = (1-s) : s = \frac{11}{13} : \frac{2}{13} = 11 : 2$ //

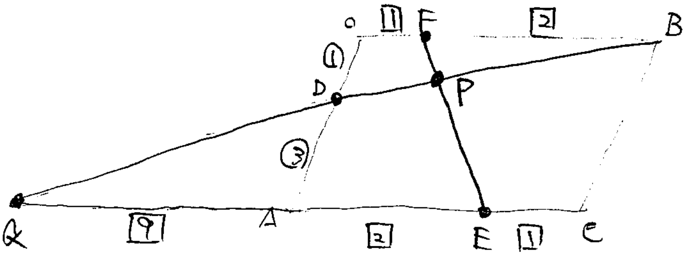
I (3) 別解

2直線 CA, BD の交点を Q とすると

△OBD ∽ △AQD より

OB : AQ = OD : AD

といえる。



また、△EPQ ∽ △FPB

より EP : FP = EQ : FB

= 11 : 2 //

II

$a_n = 7\cdot 2^{2n-1} + 3^{3n-1}$ とおく。

(ア) $n=1$ のとき、

$a_1 = 7\cdot 2^1 + 3^2 = 14+9 = 23$ より、

$n=1$ のとき、a_n は 23 の倍数である。

(イ) $n=k$ のとき、a_k が 23 の倍数であると仮定すると、

$7\cdot 2^{2k-1} + 3^{3k-1} = 23m$ (m 整数) とおけて、 ─①

$n=k+1$ のとき、

$$a_{k+1} = 7\cdot 2^{2(k+1)-1} + 3^{3(k+1)-1}$$

$$= 7\cdot 2^{2k+1} + 3^{3k+2}$$

$$= 7\cdot 2^{2k+1} + 3^3\cdot 3^{3k-1}$$ ①を利用

$$= 7\cdot 2^{2k+1} + 27(23m - 7\cdot 2^{2k-1})$$

$$= 23(27m) + 7\cdot 2^{2k+1} - 27\cdot 7\cdot 2^{2k-1}$$

$$= 23(27m) + 7\cdot 2^{2k-1}(2^2 - 27)$$

$$= 23(27m) - 7\cdot 2^{2k-1}(23)$$

$$= 23(27m - 7\cdot 2^{2k-1})$$ となり、

m と k は整数であることから、

$n=k+1$ のとき、a_n は 23 の倍数となる。

(ア)(イ)より、$n=1, 2, 3, \cdots$ について a_n は 23 の倍数である。//

III

(1) (ア) $c=1$ のとき、$a+b=1$ となるが、これを満たす $(a.b)$ はない。

(イ) $c=2$ のとき、$a+b=2$ $\therefore$ $(a.b)=(1,1)$

(ウ) $c=3$ のとき、$a+b=3$ $\therefore$ $(a.b)=(1,2)(2,1)$

(エ) $c=4$ のとき、$a+b=4$ $\therefore$ $(a.b)=(1,3)(2.2)(3,1)$

(オ) $c=5$ のとき、$a+b=5$ $\therefore$ $(a.b)=(1,4)(2.3)$
$(3,2)\ (4,1)$

(カ) $c=6$ のとき、$a+b=6$
$\therefore$ $(a.b)=(1.5)(2,4)\ (3.3)(4,2)(5,1)$

(ア)〜(カ)より $a+b=c$ となるのは、

$1+2+3+4+5=15$ (通り)

$(a.b.c)$ の全事象は 6^3 通りより、

求める確率は $\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ //

Ⅲ

(2) $k=\log_7(7^p\cdot17^q)=\log_7 7^p+\log_7 17^q$

$=p+q\log_7 17$

$=p+q(1.456)$ となる。

ここで

$2023=7^1\cdot17^2$ より $p=1,\ q=2$ であるから、

$k=1+(2)(1.456)=3.912$ となる。

求める数を、k の値が 3.912 より初めて大きくなる (p,q)

の組合せを考えることで、求めていく。

(ア) $q=0$ とすると、$k=p$ となり $p=4$ のとき、k の min 4

(イ) $q=1$ とすると、$k=p+1.456$ となり、$p=3$ のとき、k の min 4.456

(ウ) $q=2$ とすると、$k=p+2.912$ となり、$p=4$ のとき、k の min 5

(エ) $3\leqq q$ とすると、$k=p+q(1.456)$

$\geqq p+3(1.456)>4$ となってしまう。

(ア)〜(エ) より $p=4,\ q=0$ のときで、

(求める数) $=7^4=2401$ //

III

(3) $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$より

与えられた不等式は、

$$2\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \sqrt{3}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) - \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 1 - \cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2} \geqq 0$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta \geqq 0$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta) \geqq 0$$

$\therefore\ \sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta \geqq 0$ とできる。

$$(\text{左辺}) = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right)$$

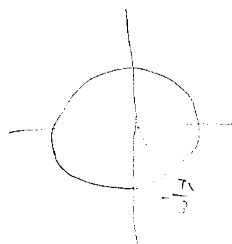
$$= 2\left(\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$= 2\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq 0$ より、

$\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqq 0$ となる。

ここで $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき、$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$

$\therefore\ -\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ より、



$$0 \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leqq \pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{3} \leqq 2\theta \leqq \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

//

IV

$x^2-3x-2=0$ は $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ となることから、

解と係数の関係を用いて、$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-2$ となる。

(1) 解と係数の関係より $\alpha^2+\beta^2=-a$，$\alpha^2\beta^2=b$ となる。

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=3^2-2(-2)\\&=9+4\\&=13\end{aligned}$$

より $13=-a$ $\therefore a=-13$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-2)^2=4$ より $b=4$

よって $\underline{(a, b)=(-13, 4)}$ //

(2) 解と係数の関係より $\alpha^6+\beta^6=-c$，$\alpha^6\beta^6=d$ となる。

$$\begin{aligned}\alpha^6+\beta^6&=(\alpha^3+\beta^3)^2-2(\alpha^3\beta^3)\\&=\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}^2-2(\alpha\beta)^3\\&=\{(3)^3-3(-2)(3)\}^2-2(-2)^3\\&=(27+18)^2-2(-8)\\&=(9\cdot5)^2+16\\&=(40+5)^2+16\\&=1600+400+25+16\\&=2041\end{aligned}$$

$\therefore -c=2041$ $\therefore c=-2041$

$\alpha^6\beta^6=(\alpha^2\beta^2)^3=(4)^3=64$ $\therefore d=64$

よって、$\underline{(c, d)=(-2041, 64)}$ //