2024 小樽商大

I

(1) $x^3+ax^2+x+b=0$ ―①

①は実数係数の3次方程式であるから、$x=1+i$を解を持つことにより $x=1-i$ も解にもつ。

したがって ①の左辺は

$\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=x^2-2x+2$ で割り切れるので、

$x^3+ax^2+x+b=(x^2-2x+2)(x+a+2)+(2a+3)x$
$+(-2a+b-4)$ となることから、

$2a+3=0$ かつ $-2a+b-4=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2},\ b=1$

よって ①は $(x^2-2x+2)(x+\frac{1}{2})=0$ となり、

他の2つの解は $x=1-i,\ -\frac{1}{2}$ である。//

I

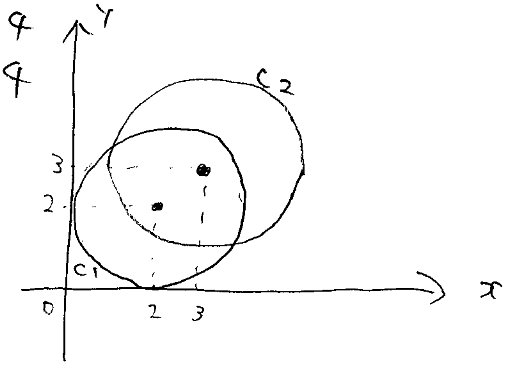
(2) $C_1 : (x-2)^2+(y-2)^2=4$ 中心$(2,2)$ 半径 2

$C_2 : (x-3)^2+(y-3)^2=4$ 中心$(3,3)$ 2

$C_1 : x^2-4x+4+y^2-4y+4=4$

$C_2 : x^2-6x+9+y^2-6y+9=4$

より、辺々引いて、



$2x-5+2y-5=0$

$\therefore \quad 2x+2y-10=0$

$\therefore \quad x+y-5=0$

$\therefore \quad y=-x+5$ を C_1 に代入して、

$(x-2)^2+(-x+5-2)^2=4$

$\therefore (x-2)^2+(-x+3)^2=4$

$\therefore \quad x^2 \, 4x+4+x^2-6x+9=4$

$\therefore \quad 2x^2-10x+9=0$

$\therefore \quad x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$

$x=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ のとき、$y=-\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)+5=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$

$x=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$ のとき、$y=-\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)+5=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

よって、共有点は $(x \cdot y)=\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ //

I

(3) ①：$x^2-2ax-a+6=0$

②：$4x^2-4ax-5a+6=0$

①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(1)(-a+6)$$
$$=a^2+a-6$$
$$=(a+3)(a-2)$$

$$\frac{D_2}{4}=(-2a)^2-(4)(-5a+6)$$
$$=4a^2+20a-24$$
$$=4(a^2+5a-6)$$
$$=4(a+6)(a-1)$$

①②について，
一方が実数解を持ち，他方は実数解を持たないためには，
次の2通りが考えられる。

(ア) $D_1\geqq 0$ かつ $D_2<0$

$\therefore\ (a+3)(a-2)\geqq 0$

かつ

$4(a+6)(a-1)<0$

$\therefore\ a\leqq -3,\ 2\leqq a$

かつ

$-6<a<1$

$\therefore\ -6<a\leqq -3$

(イ) $D_1<0$ かつ $D_2\geqq 0$

$\therefore\ -3<a<2$

かつ

$a\leqq -6,\ 1\leqq a$

$\therefore\ 1\leqq a<2$

(ア)(イ)より

$-6<a\leqq -3,\ 1\leqq a<2$ //

2024 小樽商大

Ⅱ

「$\underbrace{(x+6)(x+6)\cdots\cdots(x+6)}_{2024コ}$」

2024コのうち nコ x $(2024-n)$コ 6 を取り出す と考える。

(1) $(x+6)^{2024}$ の展開式における x^n の係数に着目する。

$$a_n = {}_{2024}C_n\,(6)^{2024-n}$$

(2)
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{{}_{2024}C_{k+1}\,(6)^{2024-(k+1)}}{{}_{2024}C_k\,(6)^{2024-k}}$$

$$= \frac{\dfrac{(2024)!}{(k+1)!\,(2024-k-1)!}\,(6)^{2023-k}}{\dfrac{(2024)!}{(k)!\,(2024-k)!}\,(6)^{2024-k}}$$

$$= \frac{(2024)!}{(k+1)!\,(2024-k-1)!}\cdot 6^{2023-k}\cdot\frac{(k)!\,(2024-k)!}{(2024)!}\cdot\frac{1}{6^{2024-k}}$$

$$= \frac{(2024-k)}{(k+1)}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2024-k}{6k+6}$$

(3) $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geqq 1$ とすると、$\dfrac{2024-k}{6k+6} \geqq 1$ $\therefore$ $2024-k \leqq 6k+6$

$\therefore$ $7k \leqq 2018$ $\therefore$ $k \leqq \dfrac{2018}{7} = 288.2\cdots$

となり、

$0 \leqq k \leqq 288$ のとき、$a_k \leqq a_{k+1}$ が成り立つ。

$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ とすると、同様にして、$289 \leqq k \leqq 2023$ のとき、

$a_k > a_{k+1}$ となる。$a_k = a_{k+1}$ となる整数k がないことから、

$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{287} < a_{288} < a_{289} > a_{290} > \cdots$

よって、a_n を最大にする n は $n = 289$

2024小樽商大

III

(1) $x^3-3x^2+a=0$ を $a=-x^3+3x^2$ として、

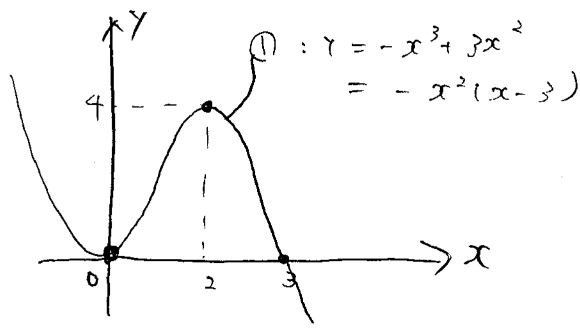
$$\begin{cases} y=-x^3+3x^2 & \text{—①} \\ y=a & \text{—②} \end{cases}$$

に分けて考える。

① のグラフを書く。$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$ より、

$y'=0$ とすると $x=0, 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$



①と②の交点がちょうど2つになるような a の値を求めればよいから $a=0$ または 4 //

Ⅲ

(2) $t=2^m$ $(t>0)$ とおくと、

$4^{m+1}-2^{m+4}+1\leqq 0$ ― ① は、

$4(t^2)-16t+1\leqq 0$

∴ $\frac{4-\sqrt{15}}{2}\leqq t\leqq\frac{4+\sqrt{15}}{2}<\frac{4+4}{2}=4=2^2$ となる。

ここで $3<\sqrt{15}<4$ より $-4<-\sqrt{15}<-3$

∴ $0<4-\sqrt{15}<1$ ∴ $0<\frac{4-\sqrt{15}}{2}<\frac{1}{2}$ となり、

$0<\frac{4-\sqrt{15}}{2}<2^{-1}$ といえる。

また、

$$2^{-2}-\frac{4-\sqrt{15}}{2}=\frac{1}{4}-\frac{4-\sqrt{15}}{2}=\frac{1-8+2\sqrt{15}}{4}=\frac{-7+\sqrt{60}}{4}>0$$

∴ $\frac{4-\sqrt{15}}{2}<2^{-2}$ となる。

$$2^{-3}-\frac{4-\sqrt{15}}{2}=\frac{1}{8}-\frac{4-\sqrt{15}}{2}=\frac{1-16+4\sqrt{15}}{8}=\frac{-15+\sqrt{16\cdot15}}{8}>0$$

∴ $\frac{4-\sqrt{15}}{2}<2^{-3}$ となる。

$$2^{-4}-\frac{4-\sqrt{15}}{2}=\frac{1-32+8\sqrt{15}}{16}=\frac{-31+\sqrt{960}}{16}=\frac{-\sqrt{961}+\sqrt{960}}{16}<0$$

∴ $2^{-4}<\frac{4-\sqrt{15}}{2}$ となる。

これより $\cdots\cdots<2^{-5}<2^{-4}<\frac{4-\sqrt{15}}{2}$ となる。∴ $t=2^m$, $\frac{4-\sqrt{15}}{2}\leqq t<\frac{4+\sqrt{15}}{2}$

m整数であることから $t=2^m=2^{-3},2^{-2},2^{-1},2^0,2^1$ ∴ mは5個

III

13)

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

カードの取り出し方の全事象は ${}_{10}C_3 = 120$（通り）

$x=5$ となるのは、${}_1C_1 \times {}_4C_2 = 6$（通り）

⑤　①〜④から2枚

$x=6$ となるのは、${}_1C_1 \times {}_5C_2 = 10$（通り）

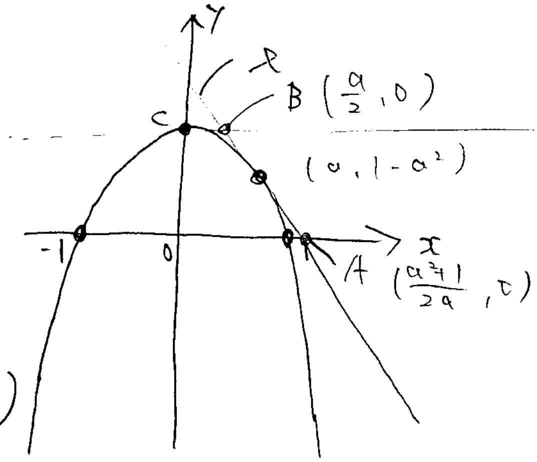
⑥　①〜⑤

$x=7$ となるのは、${}_1C_1 \times {}_6C_2 = 15$（通り）

よって、求める確率は

$$P(5 \leqq x \leqq 7) = \frac{6+10+15}{120} = \frac{31}{120}$$

Ⅳ　$a > 0$



(1) $f(x) = 1 - x^2$ とおくと、

$f'(x) = -2x$ より、

ℓの傾きは $f'(a) = -2a$

となり、ℓは、

$y = -2a(x-a) + (1-a^2)$

$\therefore\ \ell : y = (-2a)x + (a^2+1)$　となる。

点Aは　ℓ に　$y=0$ を代入して、

$0 = (-2a)x + a^2+1$

$\therefore\ 2ax = a^2+1$

$\therefore\ x = \dfrac{a^2+1}{2a}$　より　$A\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$

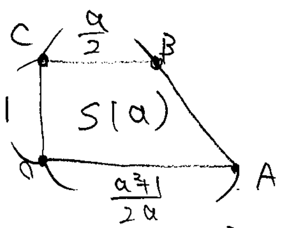
点Bは ℓ に $y=1$ を代入して

$1 = (-2a)x + a^2+1$

$\therefore\ (2a)x = a^2$

$\therefore\ x = \dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}$　より　$B\left(\dfrac{a}{2}, 1\right)$

図より



$S(a) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a^2+1}{2a}\right)(1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2+a^2+1}{2a}\right) = \dfrac{2a^2+1}{4a}$

$= \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4a}$ //

$\boxed{\text{よって } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ で } S(a) \text{ の min } \frac{1}{\sqrt{2}}}$ //

(2)　$a > 0$ より $\dfrac{a}{2} > 0$ かつ $\dfrac{1}{4a} > 0$ であるから 相加~~相乗~~相乗平均の関係を用いて、$S(a) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{4a}\right)} = 2\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

となり、等号は $\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{4a}$ $\therefore\ 4a^2 = 2$ $\therefore\ a^2 = \dfrac{1}{2}$ $\therefore\ a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(\because a > 0)$ のとき成